Σχήμα Horner (ή συνθετική διαίρεση)

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός πολυωνύμου, πχ. το P(4) στο $P(x) = 2x^3 – 3x^2 – 11x + 6$

Με τον παραδοσιακό τρόπο, δηλαδή με απευθείας αντικατάσταση στο πολυώνυμο, έχουμε:

$P(4) = 2·4^3 – 3·4^2 – 11·4 + 6 = 2·64 – 3·16 – 44 +6 = 128–48–38 = 42$

Τα καταφέραμε τελικά με τις πράξεις. Τι γίνεται όμως για πιο ζόρικες τιμές, όπως πχ. το P(17)….?

Υπάρχει άραγε μια διαδικασία με την οποία οι επίμονες πράξεις να απλουστεύονται και να γίνονται πρακτικά εφικτές;

Ευτυχώς, υπάρχει μια τέτοια διαδικασία, γνωστή ως σχήμα Horner, που μας απαλλάσσει απ’ τις επίμονες πράξεις και μας δίνει το αποτέλεσμα ευκολότερα και γρηγορότερα!

Για να καταλάβουμε όμως καλύτερα αυτή τη διαδικασία χωρίς να την αποστηθίσουμε μηχανικά, ας δούμε πως ακριβώς δουλεύει.

Το μυστικό είναι, στην παραγοντοποίηση!

Πράγματι, προσπαθώντας να παραγοντοποιήσουμε το αρχικό πολυώνυμο $P(x)=2x^3–3x^2–11x+6$ βγάζουμε κοινό παράγοντα εκεί που μπορούμε, δηλαδή, $P(x) = (2x^2–3x–11)x+6 = [(2x–3)x–11]x+6$

Σ’ αυτήν την ιδιόμορφη μορφή, αντικαθιστούμε όπου x το 4 οπότε

$P(4) = [(2·4–3)·4–11]·4+6 = [(8–3)·4–11]·4+6 = (5·4–11)·4+6$

$= (20–11)·4+6 = 9·4+6 = 36+6 = 42$

Παρατηρούμε ότι με τον τρόπο αυτό οι πράξεις έσπασαν σε μικρότερες αλλά απλούστερες! Μάλιστα, αν καταφέρναμε να τυποποιήσουμε αυτή την διαδικασία, αποφεύγοντας την γραφή των παρενθέσεων, τότε ο χρόνος υπολογισμού θα μειωνόταν ακόμη περισσότερο. Αυτό ακριβώς πετυχαίνεται με το σχήμα Horner:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -11 & 6 & 4 \\ & \xrightarrow{2\cdot 4} 8\ + & \xrightarrow{5\cdot 4} 20\ + & \xrightarrow{9\cdot 4} 36\ + & \\ \hline 2 & 5 & 9 & \boxed{42} & \end{array}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε την επαναληπτική φύση του σχήματος Horner. Ουσιαστικά είναι μια διαδικασία δύο βημάτων:

Διαγώνια πολλαπλασιάζω, κατακόρυφα προσθέτω

Στην πράξη, δεν γράφουμε τα βέλη, ούτε τις ενδιάμεσες πράξεις (τους πολλαπλασιασμούς), οπότε επιταχύνουμε ακόμη περισσότερο!

Η χρησιμότητα του σχήματος Horner δεν περιορίζεται μόνο στον υπολογισμό τιμών πολυωνύμων. Για να το δούμε αυτό ξεκάθαρα, ας εκτελέσουμε την διαίρεση P(x):(x–4) όπου $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$

Το σχήμα της διαίρεσης είναι:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -3x^2 & -11x & +6 & x-4 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +8x^2 & & & 2x^2+5x+9 \\ \cline{1-4}
 & 5x^2 & -11x & +6 & \\
 & -5x^2 & +20x & & \\ \cline{1-4}
 & & 9x & +6 & \\
 & & -9x & +36 & \\ \cline{1-4}
 & & & 42 &
\end{array}
$$

Σχήμα διαίρεσης

Απ’ την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$P(x) = (x-4)\cdot(\mathbf{2}x^2 + \mathbf{5}x + \mathbf{9}) + 42$$

Διαιρετέος = διαιρέτης · πηλίκο + υπόλοιπο

Τι παρατηρούμε σε σχέση με το σχήμα Horner για τον υπολογισμό του P(4) της προηγούμενης σελίδας ;

2	–3	–11	6	4
	8	20	36	
2	**5**	**9**	42	

Σχήμα Horner

1^{ον}) Απ’ το σχήμα της διαίρεσης παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x–4) είναι 42

Αυτό μπορούμε ακόμη να το εξάγουμε και απ’ την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) = (x-4)\cdot(2x^2 + 5x + 9) + 42$ όπου αν θέσουμε όπου x το 4 λαμβάνουμε αμέσως P(4)=42 και τέλος το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και απ’ το σχήμα Horner!

Συμπέρασμα: **Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με ένα διώνυμο ισούται με την τιμή του πολυωνύμου στην ρίζα του διωνύμου (θεώρημα υπολοίπου).**

2^{ον}) Απ’ το σχήμα της διαίρεσης παρατηρούμε ότι το πηλίκο είναι το πολυώνυμο $2x^2 + 5x + 9$ οι συντελεστές του οποίου εμφανίζονται στη τελευταία γραμμή του σχήματος Horner. Αυτό σημαίνει ότι μπορούσαμε να εξάγουμε το πηλίκο απ’ ευθείας απ’ το σχήμα Horner υποκαθιστώντας έτσι ολόκληρο το σχήμα της διαίρεσης!

Συμπέρασμα: **Στην ειδική περίπτωση που ένα πολυώνυμο διαιρείται με διώνυμο, το σχήμα Horner δίνει το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής.**

Και αν παρόλα αυτά κάποιος παραμένει δύσπιστος ας υπολογίσει το Q(–4) όπου $Q(x)= x^6 + 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2-10x-8$