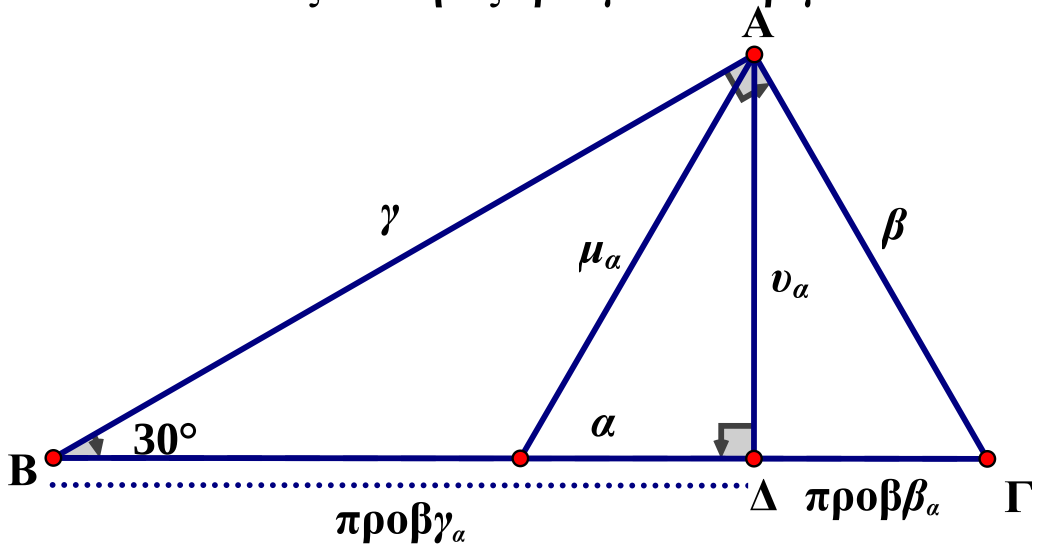
Βασικές ιδιότητες ορθογωνίων τριγώνων



I$_1$ Πυθαγόρειο Θεώρημα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών ($ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$)

I$_2$ Θεώρημα των προβολών $\beta^2 = \text{προβ}\beta_\alpha \cdot \alpha$ και $\gamma^2 = \text{προβ}\gamma_\alpha \cdot \alpha$

Το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου ισούται με την προβολή της στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα

($ΓΑ^2 = ΓΔ \cdot ΓΒ$ και $ΒΑ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$)

I$_3$ Ύψος συναρτήσει προβολών $\upsilon_\alpha^2 = \text{προβ}\beta_\alpha \cdot \text{προβ}\gamma_\alpha$

Το τετράγωνο του ύψους της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα ($ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$)

I$_4$ Ύψος συναρτήσει πλευρών $\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \gamma$

Το ύψος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου επί την υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των καθέτων πλευρών ($ΒΓ \cdot ΑΔ = ΑΓ \cdot ΑΒ$)

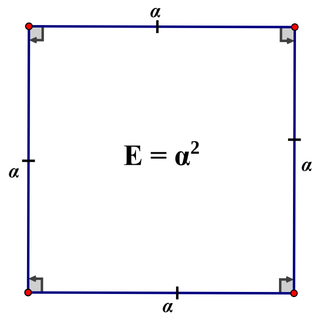
I$_5$ Γωνία 30^o Αν $\widehat{B} = 30^o$ *τότε* $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$

Αν μια γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 30^o τότε η απέναντι πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

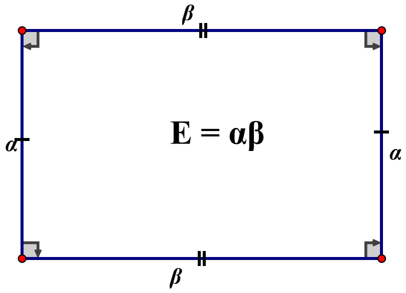
I$_6$ $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$

Η διάμεσος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της.

Τυπολόγιο εμβαδών

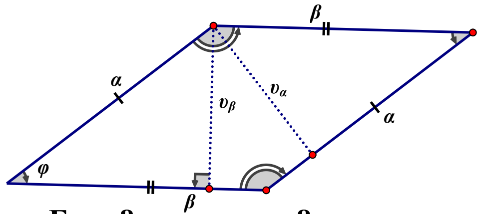


1) Τετράγωνο: Το εμβαδόν τετραγώνου ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του.

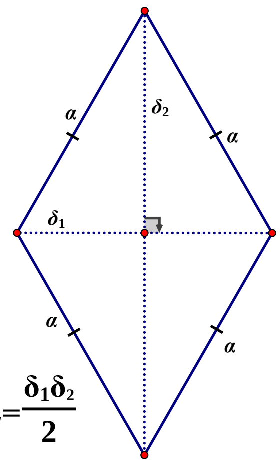


2) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο: Το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

3) Παραλληλόγραμμο: Το εμβαδόν τυχαίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του επί το ημίτονο μιας γωνίας του ή με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.



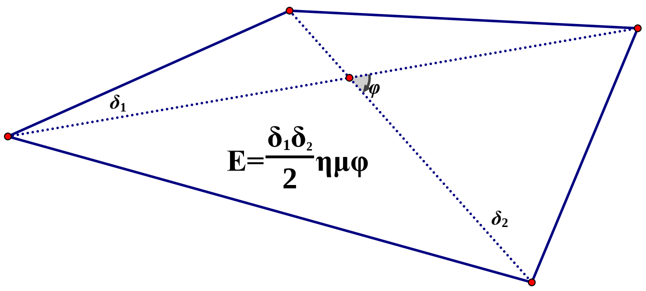
$$\mathbf{E = \alpha\beta\eta\mu\varphi = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta}$$

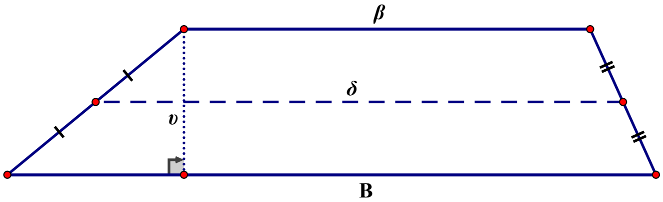


$$\mathbf{E=\frac{\delta_1\delta_2}{2}}$$

3) Ρόμβος: Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του ή με έναν απ' τους τύπους εμβαδού παραλληλογράμμου.

4) Τετράπλευρο: Το εμβαδόν τυχαίου τετραπλεύρου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του επί το ημίτονο μιας γωνίας που σχηματίζουν αυτές.



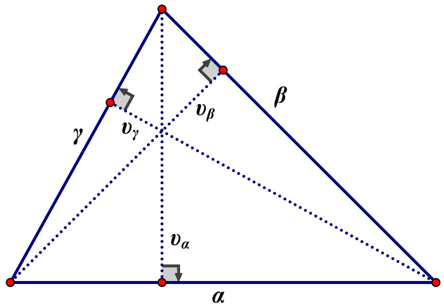


$$\mathbf{E = \frac{B+\beta}{2}\upsilon = \delta\upsilon}$$

5) Τραπέζιο: Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων επί το ύψος του ή με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

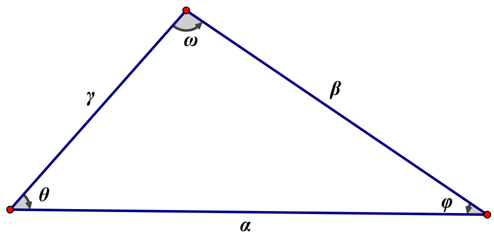
5 τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

1) Κλασσικός τύπος: Το εμβαδόν τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.



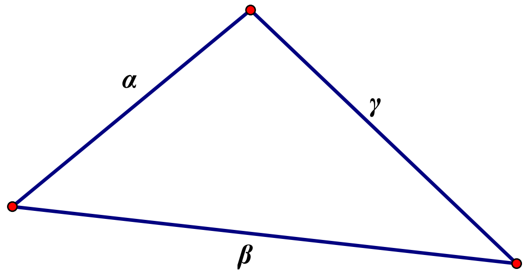
$$E = \frac{αυ_α}{2} = \frac{βυ_β}{2} = \frac{γυ_γ}{2}$$

2) Τριγωνομετρικός τύπος: Το εμβαδόν τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.

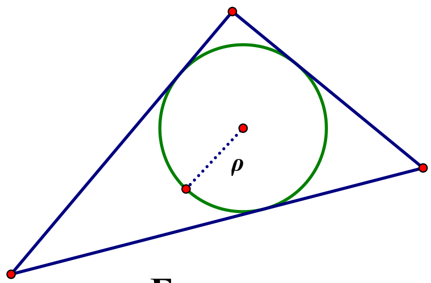


$$E = \frac{αβημφ}{2} = \frac{αγημθ}{2} = \frac{βγημω}{2}$$

3) Τύπος του Ήρωνα: Το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, δηλ. 2τ = α+β+γ



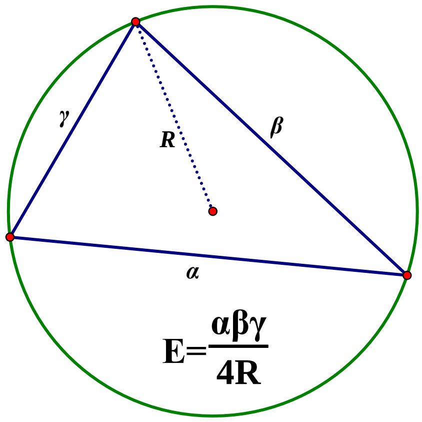
$$E=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$



$$E = τρ$$

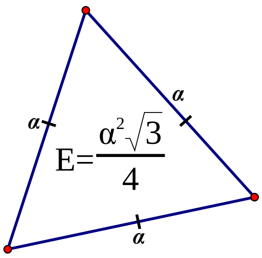
4) Τύπος εγγεγραμμένου κύκλου: Το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει της ακτίνας ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του.

5) Τύπος περιγεγραμμένου κύκλου: Το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου του.



$$E=\frac{αβγ}{4R}$$

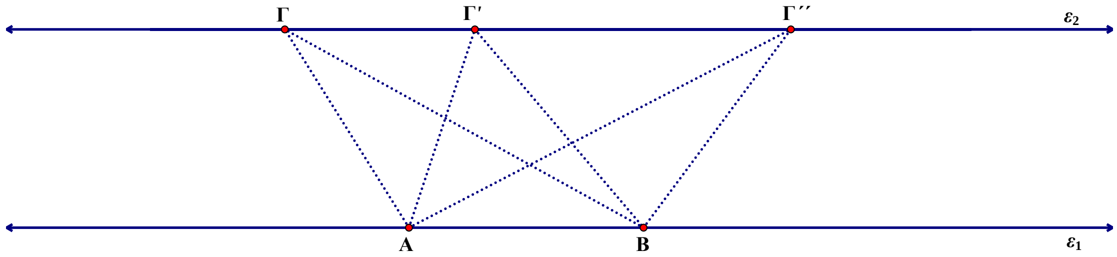
Τέλος, αξίζει να μάθουμε και το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α



$$E=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$$

Σχέσεις εμβαδών

1) ***Τρίγωνα μεταξύ παραλλήλων***: Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία Α, Β πάνω σε μια ευθεία ε_1 και Γ μεταβλητό σημείο μιας ευθείας $\varepsilon_2 // \varepsilon_1$

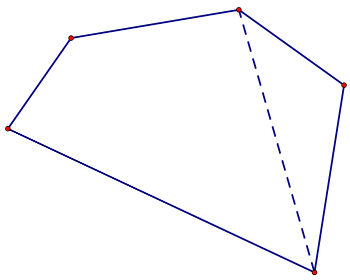


$$(ΑΒΓ) = (ΑΒΓ') = (ΑΒΓ'')$$

Τότε, όλα τα σχηματιζόμενα τρίγωνα με βάση ΑΒ είναι ισοεμβαδικά, διότι έχουν κοινή βάση ΑΒ και ίσα τα αντίστοιχα ύψη τους (την απόσταση των παράλληλων ευθειών).

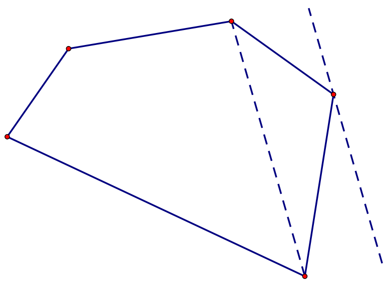
Άρα, **αν η κορυφή ενός τριγώνου βρίσκεται σε ευθεία παράλληλη στη βάση του, τότε το τρίγωνο είναι ισοεμβαδικό με κάθε άλλο τρίγωνο που έχει την ίδια βάση και κορυφή οποιοδήποτε σημείο της παράλληλης ευθείας.**

Τριγωνισμός πολυγώνου!



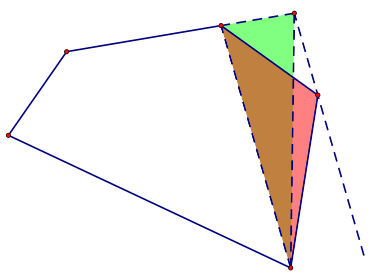
Ακριβώς σ' αυτή τη διαπίστωση στηρίζεται ο τριγωνισμός οποιουδήποτε πολυγώνου. Με τον όρο αυτό εννοούμε τον μετασχηματισμό οποιουδήποτε πολυγώνου σε ισοδύναμο τρίγωνο. Τα βήματα της διαδικασίας είναι τα εξής:

1) Επιλέγουμε μια κορυφή (αυτή θα εξαλειφτεί) και σχηματίζουμε το τρίγωνο που σχηματίζεται με αυτήν την κορυφή και τις εκατέρωθεν της, (φέρνοντας την αντίστοιχη διαγώνιο)



2) Από την κορυφή που θα εξαλείψουμε φέρουμε παράλληλη στη διαγώνιο

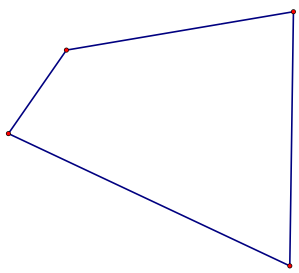
3) Προεκτείνουμε μια πλευρά του πολυγώνου ώστε να συναντήσει την παράλληλη και από το σημείο τομής σχηματίζουμε τρίγωνο ισοδύναμο με το αρχικό



Τότε, το αρχικό πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη

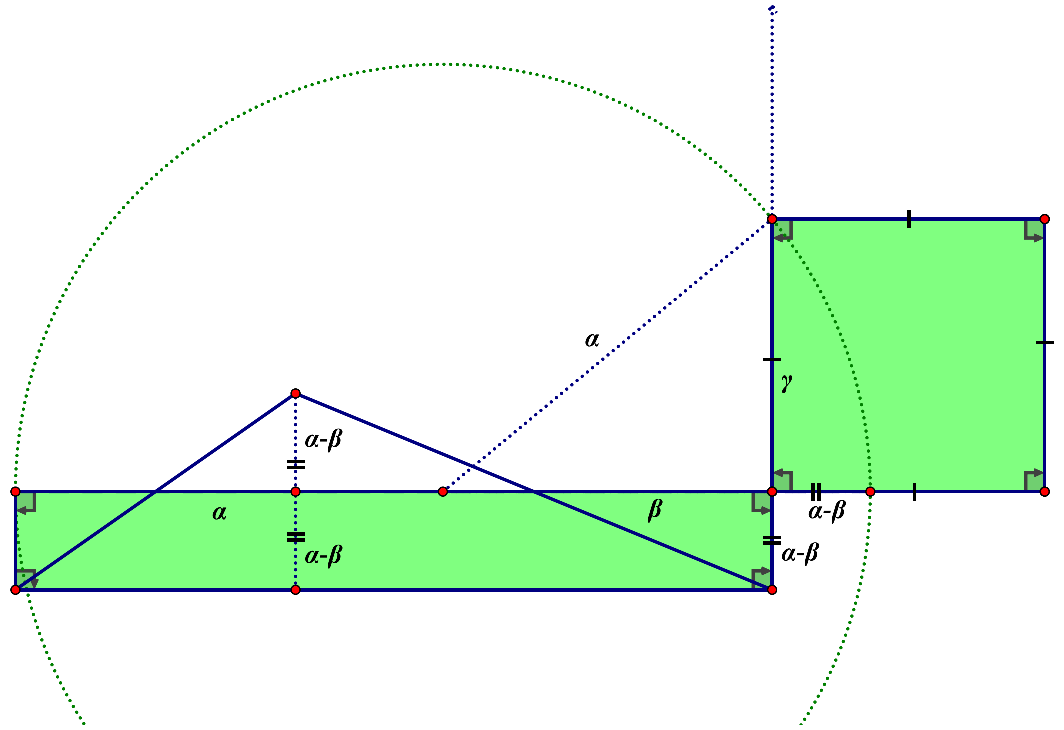
Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, θα σχηματιστεί τελικά ένα ισοδύναμο τρίγωνο.

Να γιατί το τρίγωνο είναι το πιο σπουδαίο απ' όλα τα ευθύγραμμα σχήματα και το μελετήσαμε διεξοδικά δίνοντας 5 διαφορετικούς τύπους για το εμβαδόν του!



Τετραγωνισμός τριγώνου

Από τυχαίο τρίγωνο φέρουμε το ύψος στην αντίστοιχη βάση και από το μέσο του ύψους παράλληλη στη βάση. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται, προεκτείνουμε μια βάση του κατά το ύψος του και με κέντρο το μέσο του αυξημένου τμήματος γράφουμε κύκλο ακτίνας έστω *α*. Έστω β το τμήμα της διαμέτρου με άκρα το κέντρο και την κορυφή που δεν διέρχεται από τον κύκλο, τότε το υπόλοιπο κομμάτι της διαμέτρου θα είναι α-β και συνεπώς αυτό θα είναι και το ύψος του ορθογωνίου. Απ' την κορυφή της προέκτασης, προεκτείνω το ύψος του ορθογωνίου μέχρι να τμήσουμε τον κύκλο και έστω γ το τμήμα αυτής της προέκτασης. Τότε γ είναι η πλευρά ενός τετραγώνου ισοδύναμου με το τρίγωνο.



Απόδειξη

Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου

E_2 το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

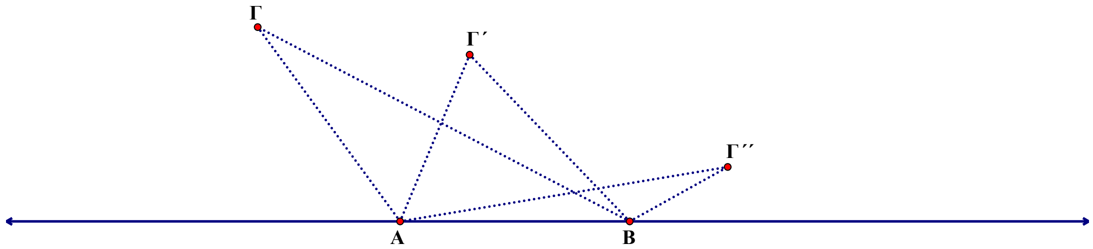
E_3 το εμβαδόν του τετραγώνου, τότε

$$\mathrm{E}_1 = \frac{(\alpha+\beta)\cdot 2(\alpha-\beta)}{2} = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$\mathrm{E}_2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$ και $\mathrm{E}_3 = \gamma^2 \overset{\Pi\Theta}{=} \alpha^2 - \beta^2$

Άρα $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3$

2) ***Τρίγωνα με κοινή βάση***: Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία Α, Β πάνω σε μια ευθεία και Γ μεταβλητό σημείο του επιπέδου εκτός ευθείας.

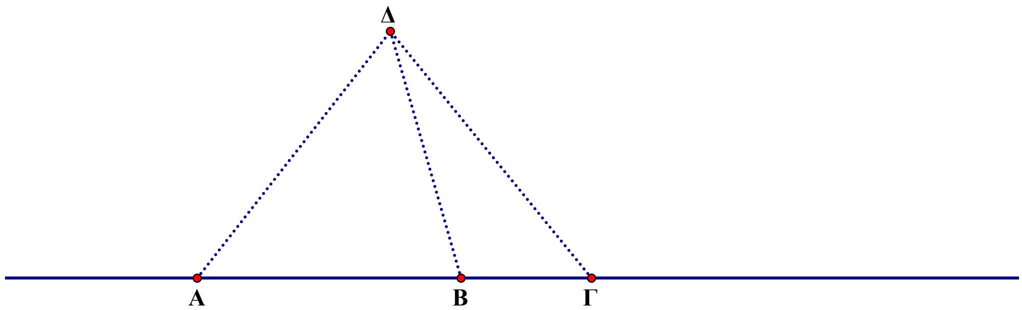


Τότε τα σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΓ´ και ΑΒΓ´´ έχουν κοινή βάση ΑΒ και συνεπώς

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒΓ}')} = \frac{\upsilon_\gamma}{\upsilon_{\gamma'}}, \quad \frac{(\text{ΑΒΓ}')}{(\text{ΑΒΓ}'')} = \frac{\upsilon_{\gamma'}}{\upsilon_{\gamma''}}, \quad \frac{(\text{ΑΒΓ}'')}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\upsilon_{\gamma''}}{\upsilon_\gamma}$$

Άρα, αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών τους.

3) ***Τρίγωνα με κοινό ύψος:*** Θεωρούμε τα συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ και σημείο Δ εκτός ευθείας.

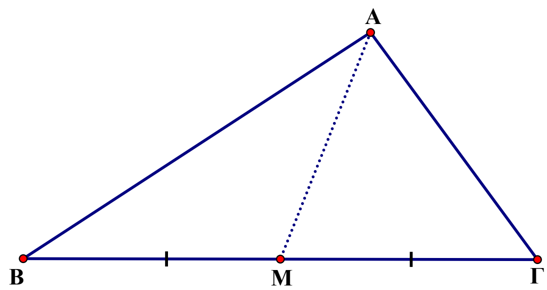


Τότε τα σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ και ΑΔΓ έχουν ίσα ύψη (αυτό που διέρχεται απ' την κορυφή Δ) και συνεπώς

$$\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΒΔΓ})} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}, \quad \frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}, \quad \frac{(\text{ΒΔΓ})}{(\text{ΑΔΓ})} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$$

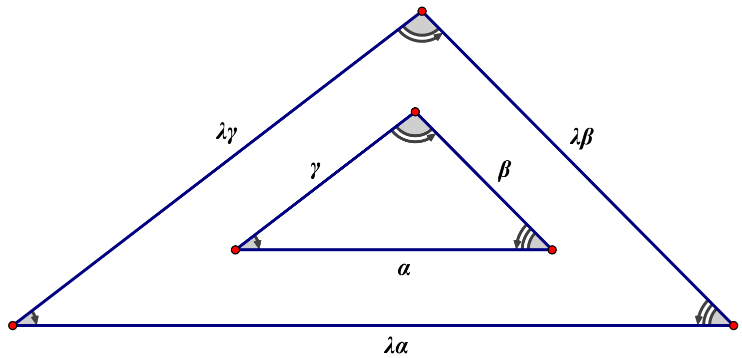
Άρα, αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Μια σημαντική συνέπεια αυτής της πρότασης είναι το θεώρημα του Θαλή (την απόδειξη του οποίου παρουσιάζουμε παρακάτω) και ότι **κάθε διάμεσος δημιουργεί δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα**.



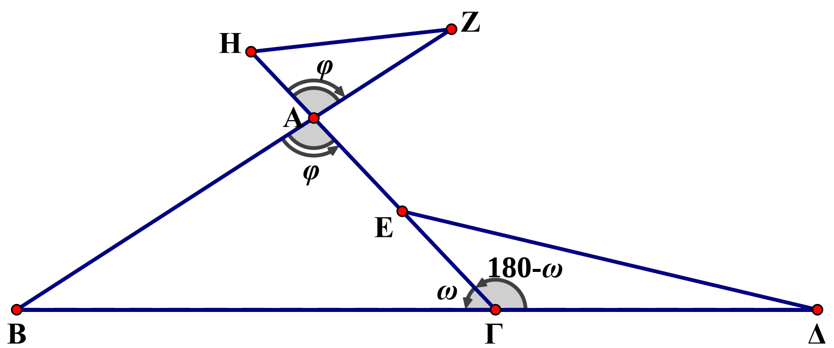
(ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)

4) ***Όμοια τρίγωνα*:** Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



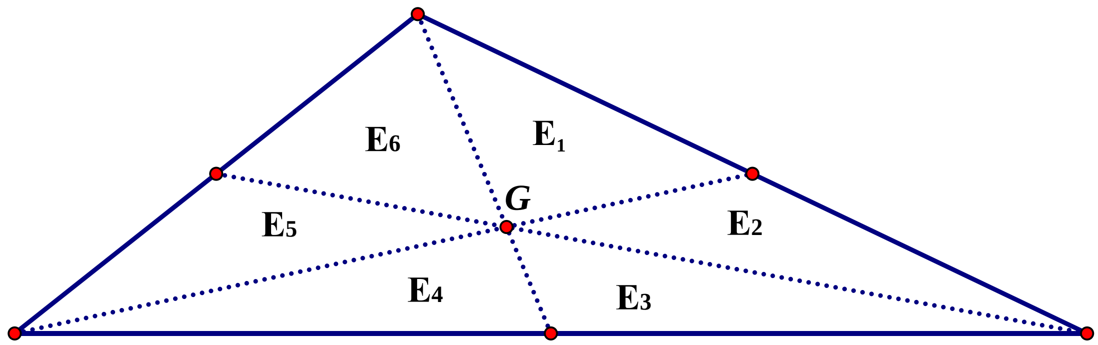
Δηλαδή $\frac{E_{\mu\varepsilon\gamma}}{E_{\mu\iota\kappa}} = \lambda^2$ και η απόδειξη προκύπτει εύκολα με τον τριγωνομετρικό τύπο για το εμβαδόν τριγώνου. Επειδή κάθε πολύγωνο χωρίζεται σε τρίγωνα (απ' τις διαγωνίους του και συγκεκριμένα σε ν–2 τρίγωνα όπου ν οι κορυφές του), συμπεραίνουμε γενικότερα ότι, **ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.**

5) ***Τρίγωνα με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές:*** Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια άλλη γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των γινομένων των περιεχομένων πλευρών.



$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{AHZ})}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\varphi}{\frac{1}{2}\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{AH}\cdot\eta\mu\varphi}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{AH}}, \qquad \frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\Gamma\mathrm{E}\Delta)}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}\cdot\eta\mu\omega}{\frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot\Gamma\mathrm{E}\cdot\eta\mu(180-\omega)}=\frac{\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}}{\Gamma\Delta\cdot\Gamma\mathrm{E}}$$

Μια σημαντική συνέπεια αυτής της πρότασης είναι ότι **το βαρύκεντρο κάθε τριγώνου δημιουργεί 6 ισοεμβαδικά τρίγωνα!**



$$\mathbf{E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την πρόταση 5) προκύπτει ότι $\dfrac{E_1}{E_4} = \dfrac{\frac{2}{3}\mu_\alpha \cdot \frac{1}{3}\mu_\beta}{\frac{1}{3}\mu_\alpha \cdot \frac{2}{3}\mu_\beta} = 1 \Leftrightarrow E_1 = E_4$

και όμοια $E_2=E_5$, $E_3=E_6$ (1)

αλλά η διάμεσος χωρίζει κάθε τρίγωνο σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα, επομένως

$E_1=E_2$, $E_3=E_4$ και $E_5=E_6$ (2)

Απ’ τις σχέσεις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.