

**Ομαδοποίηση ασκήσεων στα πολυώνυμα – πολυωνομικές εξισώσεις**

<p>Ορολογία – πράξεις πολυωνύμων  <math>P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0</math>                  Το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου ισούται με την τιμή του πολυωνύμου στη μονάδα.                  Κάθε αριθμός είναι η τιμή ενός κατάλληλου πολυωνύμου στο 10</p>	<p align="center">A1-6 (σελ. 131), B1-5 (σελ. 132)</p> <p>★ Ποιο είναι το σταθερό πολυώνυμο <math>P(x)</math> για το οποίο ισχύει <math>P(-3) = \frac{\sqrt{3}}{2}</math> ;                  ★ Υπάρχουν τιμές των πραγματικών αριθμών <math>\lambda, \mu</math> ώστε το πολυώνυμο <math>(\lambda-1)x^2 + (3\mu-1)x + (2\nu+\mu-\lambda)</math> να είναι το μηδενικό ;                  ★ Αν <math>\mu</math> θετικός ακέραιος, να γράψετε την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το πολυώνυμο <math>P(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0</math> να έχει βαθμό <math>\mu-1</math></p>
<p>Διαίρεση πολυωνύμων:  <math>\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)</math>                  και  <math>\deg \nu &lt; \deg \delta</math></p>	<p align="center">A1 (σελ. 139), Γ6 (σελ. 155)</p> <p>★ Δίνεται το <math>P(x) = (x+1)^{2014}</math>                  α) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης <math>P(x):Q(x)</math> όπου <math>Q(x) = x(x+1)(x+2)</math>                  β) Να δειχθεί ότι ο αριθμός <math>\kappa = 2014 \cdot 2015 \cdot 2016</math> διαιρεί τον αριθμό <math>\lambda = 2015^{2014} - 2015^2</math></p>
<p>Σχήμα Horner: συντόμευση της διαίρεσης <math>P(x):(ax+\beta)</math></p>	<p align="center">A4,5,10 (σελ. 139), Γ7 (μόνο το <math>P(11)</math>, σελ. 155)</p> <p>★ Να βρεθεί το <math>P(-13)</math> όπου <math>P(x) = 3x^4 + 40x^3 + 12x^2 - 10x + 2039</math></p>
<p>Θ. υπολοίπου: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με ένα διώνυμο ισούται με την τιμή του πολυωνύμου στη ρίζα του διωνύμου  <math>P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad   \quad ax + \beta</math></p> <hr/> <p align="center"><math>\nu = P\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)</math></p>	<p align="center">A2 (σελ. 139), B2i (σελ. 140)</p> <p>★ Όταν το πολυώνυμο <math>x^3 + 2x^2 - 5ax - 7</math> διαιρείται με <math>x+1</math> αφήνει υπόλοιπο <math>\nu_1</math> ενώ όταν το πολυώνυμο <math>x^3 + ax^2 - 12x + 6</math> διαιρείται με <math>x-2</math> αφήνει υπόλοιπο <math>\nu_2</math>. Αν <math>2\nu_1 + \nu_2 = 6</math> να βρείτε το <math>a</math>.                  ★ Αν το <math>P(x)</math> διαιρείται με <math>x+2</math> αφήνει υπόλοιπο <math>-19</math> ενώ αν διαιρείται με <math>x-1</math> αφήνει υπόλοιπο <math>1</math>. Τι υπόλοιπο αφήνει αν διαιρείται με <math>(x+2)(x-1)</math> ;                  ★ Δίνεται το πολυώνυμο <math>P(x)</math> για το οποίο ισχύουν <math>P^2(2) + 25 \leq 10P(2)</math> και <math>P(1) - P(2) = 3</math>. Επίσης το <math>P(x)</math> διαιρούμενο με <math>x-3</math> δίνει υπόλοιπο <math>P(4) - 16</math> ενώ διαιρούμενο με <math>x-4</math> δίνει υπόλοιπο <math>2P(3) + 9</math>. Να βρεθεί το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου <math>Q(x) = P^2(x) + P(x+2) + P(x+3) - 94</math></p>
<p>Θ. παράγοντα:  <math>\rho   P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-\rho)\pi(x)</math>                  και <math>\deg \pi = (\deg P) - 1</math></p>	<p align="center">A3,6,7,8,9 (σελ. 139), B3,4,5 (σελ. 140)</p> <p>★ Αν <math>x-3</math> παράγοντας του πολυωνύμου <math>Q(x) = 9(x-k)2(5x-16) - (x-12)(7x-19)2</math> να βρεθεί ο <math>k</math>.                  ★ Αν <math>x-3</math> παράγοντας του πολυωνύμου <math>P(x)</math> δείξτε ότι το <math>x-2</math> είναι παράγοντας του <math>P(4x-5)</math></p>
<p>Θ. ακέραιης ρίζας: Αν <math>P(x)</math> πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και <math>\rho \in \mathbb{Z}^*</math> ρίζα του <math>P(x)</math> τότε <math>\rho   P(0)</math></p>	<p align="center">A1,2,3,9,7+iii) <math>h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6</math> (σελ. 146), B2,3,5,9 (σελ. 148)</p> <p>★ Να λυθεί η εξίσωση <math>2016x^2 + 2015x - 1 = 0</math>                  ★ Για ποιες τιμές του <math>p</math> οι εκφράσεις <math>p^3 - p^2</math> και <math>8p - 12</math> είναι ίσες ?                  ★ Αν το γράφημα της συνάρτησης <math>y = x^4 - ax^3 - 10x^2 + 80x - 96</math> τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο <math>(4,0)</math> να βρεθεί το <math>a</math> και τα υπόλοιπα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα.</p>
<p>Πρόσημο γινομένου</p>	<p align="center">A4,5,6,8 (σελ. 147)</p>

**Συμπληρωματικές ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας στα πολυώνυμα – πολυωνυμικές εξισώσεις**

1) Έστω τα πολυώνυμα  $P(x) = 5x - 4$  και  $Q(x) = (\kappa + \lambda)x + \kappa - 2\lambda$  όπου  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν τα πολυώνυμα P και Q είναι ίσα, να βρεθούν τα  $\kappa, \lambda$

β) Αν  $\frac{5x-4}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$  να βρεθούν οι σταθερές A, B

γ) Να αναλυθεί το κλάσμα  $\frac{23}{44}$  σε άθροισμα ή διαφορά δύο ανάγωγων κλασμάτων, τα οποία θα έχουν παρονομαστές 4 και 11

2) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $\Delta(x)$  με το  $\delta(x)$ , όπου:

α)  $\Delta(x) = x^{200} - 3x^{199} - 1$ ,  $\delta(x) = x^2 - 4x + 3$  Hint: Ταυτότητα διαίρεσης Απάντηση:  $x - 4$

β)  $\Delta(x) = x^{2000} - 4x^{1998} + 2$ ,  $\delta(x) = x^2 - 2x$  Hint: Ταυτότητα διαίρεσης Απάντηση: 2

γ)  $\Delta(x) = x^{2000} - 125x^{1997} + 5$ ,  $\delta(x) = x^2 - 5x$  Hint: Ταυτότητα διαίρεσης Απάντηση: 5

3) Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta$  αν η διαίρεση  $(x^8 + 2x^7 + 3x^2 + \alpha x + \beta) : (x^2 + x - 2)$  είναι τέλεια Hint: Ταυτότητα διαίρεσης Απάντηση:  $\alpha=2, \beta=-8$

4) Να βρεθεί η τιμή  $P(9998)$  όπου  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$  Hint: Ομαδοποίηση Απάντηση:  $9996 \cdot 10^8$

5) Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2\alpha x^3 - (2\alpha^2 + \alpha + 2)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha + 1)x - \alpha$  έχει παράγοντα το  $x - \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  να βρεθούν οι ρίζες του.  
Hint: Horner + Ομαδοποίηση Απάντηση:  $\alpha, 1/\alpha, 1/2$

6) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $x^7 - x^6 + x = 1$  Hint: Ομαδοποίηση Απάντηση: 1

β)  $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = 0$  Hint: Κοινός παράγοντας και διαφορά τετραγώνων Απάντηση:  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

γ)  $x^7 + x^6 - 27x = 27$  Hint: Ομαδοποίηση Απάντηση:  $-1, \pm \sqrt{3}$

δ)  $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$  Hint: Ομαδοποίηση Απάντηση:  $\pm 1, \pm 2, 3$

ε)  $x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 4x^3 + x - 2 = 0$  Hint: Ομαδοποίηση Απάντηση:  $-1, 2$

ζ)  $2x^7 + x^6 + 2x^4 + x^3 + 2x + 1 = 0$  Hint: Ομαδοποίηση (τα 2-ρια) Απάντηση:  $-1/2$

η)  $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$  Hint: Horner + Ομαδοποίηση (ή διάσπαση  $7=3+4$ ) Απάντηση:  $-1, \pm 2, 3$

θ)  $2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = 0$  Hint: Horner + Ομαδοποίηση Απάντηση:  $-1, 2, 1/2, \pm \sqrt{2}$

ι)  $x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2$  Hint: Πράξεις και Horner Απάντηση:  $-2, 1 \pm \sqrt{3}$

κ)  $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$  Hint: Πράξεις και Horner Απάντηση:  $2, -3$

λ)  $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$  Hint: Horner Απάντηση:  $\pm 2, 3, -4$

μ)  $x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24 = 0$  Hint: Horner Απάντηση:  $\pm 1, -2, 3, -4$

ν)  $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$  Hint: Μετασχηματισμός  $x-3 = y$  και Horner Απάντηση:  $2, 3$