Παραγοντοποίηση τριωνύμου με ακέραιους συντελεστές

Έναν, πρακτικά γρήγορο, τρόπο παραγοντοποίησης του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ μας παρέχει ο τύπος $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - \rho)(\alpha x - \frac{\gamma}{\rho})$ όπου $\rho \neq 0$ ακέραιη ρίζα του τριωνύμου.

Απόδειξη

Ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ όπου $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ οι ρίζες του τριωνύμου. Με $x_1 = \rho$ έχουμε $\alpha(x - x_1)(x - x_2) = (x - \rho)(\alpha x - \alpha x_2)$ αλλά απ' τους τύπους συντελεστών-ριζών (Vieta) $\rho \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\rho x_2 = \gamma \Leftrightarrow \alpha x_2 = \frac{\gamma}{\rho}$ άρα $\alpha x^2+\beta x+\gamma = (x - \rho)(\alpha x - \frac{\gamma}{\rho})$

Παραδείγματα: Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα

1ο) $3x^2 + 2x - 8$

Παρατηρώ ότι -2 ρίζα του τριωνύμου διότι $3\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 8 = 0$ άρα

$$3x^2 + 2x - 8 = (x + 2)(3x - 4)$$

2ο) $5x^2 - 17x + 6$

Παρατηρώ ότι 3 ρίζα του τριωνύμου διότι $5\cdot 3^2 - 17\cdot 3 + 6 = 0$ άρα

$$5x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(5x - 2)$$

3ο) $4x^2 + 10x - 6$

Καταρχάς $4x^2 + 10x - 6 = 2(2x^2 + 5x - 3)$ και παρατηρώ ότι -3 ρίζα του τριωνύμου διότι $2\cdot(-3)^2 - 17\cdot(-3) - 6 = 0$ άρα

$$4x^2 + 10x - 6 = 2(x + 3)(2x - 1)$$

Παρατηρήσεις

1η) Η απόδειξη απλουστεύεται με το σχήμα Horner για $x = \rho$ (χωρίς Vieta) και δεν χρειάζεται καν η απομνημόνευση του τύπου. Οι μαθητές όμως μικρότερων τάξεων δεν γνωρίζουν το σχήμα Horner.

2η) Ο σταθερός όρος γ υποτίθεται ότι είναι μη μηδενικός διότι διαφορετικά $\gamma=0$ και η παραγοντοποίηση είναι άμεση: $\alpha x^2 + \beta x = x(\alpha x + \beta)$

3η) Αναζητούμε ρίζα ρ στον σταθερό όρο γ του τριωνύμου, αφού πάντοτε στη περίπτωση μας $\rho | \gamma$ (Θ. ακέραιης ρίζας). Θυμάμαι ότι η εύρεση των αριθμών α και β στην ταυτότητα $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$ ξεκινάει απ' τους διαιρέτες του σταθερού όρου αβ πχ. ισχύει $x^2 - 2000x + 1999 = (x-1)(x-1999)$ διότι $1999=(-1)\cdot(-1999)$ και $-1-1999 = -2000$

4η) Τα περισσότερα ΄΄σχολικά΄΄ τριώνυμα είναι της παραπάνω μορφής, δηλαδή τριώνυμα με ακέραιους συντελεστές και ρίζα διαιρέτη του σταθερού όρου, επομένως στη πράξη ο τρόπος αυτός δουλεύει αρκετά γρήγορα. Πράγματι, δοκιμάστε και μόνοι σας!

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

I.	$2x^2-5x+3$,	$2y^2-21y+49$,	$2\omega^2+7\omega+3$,	$2\kappa^2-\kappa-1$,	$2c^2-3c+1$,
II.	$-2\alpha^2+5\alpha+7$,	$2y^2-17y-9$,	$2\omega^2+\omega-10$,	$2x^2-3x-5$,	$3\kappa^2+5\kappa-2$
III.	$3\omega^2-5\omega-2$,	$3\lambda^2+2\lambda-1$,	$3\mu^2-10\mu+3$,	$3x^2-x-24$,	$3\mu^2-25\mu+8$,
IV.	$3\nu^2-4\nu-4$,	$-3\alpha^2+11\alpha+70$,	$5\nu^2+2\nu-3$,	$5y^2-2y-3$,	$5\rho^2-6\rho+1$,
V.	$6x^2-25x-25$,	$-7\lambda^2+2\lambda+329$,	$14x^2+11x-3$,	$16x^2+21x-22$,	$2016x^2+2015x-1$

VI. $x^2+\frac{1}{7}x-50$, $x^2-2{,}5x+1$, $3x^4-5x^2+2$, $4x^4-41x^2+100$, $4x^4-5x^2+6$, $4x^2-12xy+8y^2$