Επίλυση τριωνύμου με Vieta

Όπως είναι γνωστό, αν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 – Sx + P = 0$

Με τη βοήθεια αυτής της πρότασης μπορούμε να επιλύουμε μια μεγάλη κατηγορία εξισώσεων, τις μονικές δευτεροβάθμιες εξισώσεις $\mathbf{x^2 – Sx + P = 0}$ στις οποίες ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι η μονάδα.
Πχ. οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 – 3x + 2 = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2 αφού το 2 αναλύεται σε $1\cdot2$ (πάντοτε ξεκινάμε απ’ τον σταθερό όρο) και 1+2=3
Πιο εντυπωσιακά παραδείγματα είναι τα εξής:
2ο $x^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{15}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ ή $x=\sqrt{3}$
3ο $x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\sqrt{2}$
4ο $x^2-\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}-\sqrt{10}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ ή $x=1-\sqrt{2}$
5ο $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow x^2-2\alpha x+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0 \Leftrightarrow x=\alpha-\beta$ ή $x=\alpha+\beta$

Αν έχουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $–x^2 + Sx + P = 0$ τότε με αλλαγή στα πρόσημα των συντελεστών της αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Τι γίνεται όμως αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν είναι 1 ή –1 ; Αναγκαστικά καταφεύγουμε στον τύπο επίλυσης με την διακρίνουσα ή όχι απαραίτητα;

Θα περιγράψουμε έναν απλό τρόπο που μας επιτρέπει να μετατρέπουμε κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ στην μονική της μορφή $x^2 – Sx + P = 0$ χωρίς να διαιρούμε με τον συντελεστή α αποφεύγοντας έτσι τα κλάσματα!

Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου της έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\alpha x^2 + \alpha\cdot\beta x + \alpha\cdot\gamma = \alpha\cdot 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha x})^2 + \beta(\boldsymbol{\alpha x}) + \alpha\gamma = 0$$

Αυτό ήταν! Προέκυψε ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς **αx**, δηλαδή ο άγνωστός είναι ο **αx** και αν βρούμε τον βοηθητικό αυτό άγνωστο βρίσκουμε και τον άγνωστο x. Τώρα απλώς αναζητάμε αριθμούς με γινόμενο αγ και άθροισμα –β

Πχ. $2x^2 + x – 21 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot2x^2 + 2\cdot x – 2\cdot21 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 + (2x) – 42 = 0$ και αναζητάμε αριθμούς με γινόμενο –42 και άθροισμα –1

Αυτοί είναι οι 6 και –7 άρα ($2x = 6 \Leftrightarrow x = \mathbf{3}$) ή ($2x = –7 \Leftrightarrow x = \mathbf{–7/2}$)

Ας δούμε και ένα ακόμη παράδειγμα στο οποίο φαίνεται καλύτερα το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου.

Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - (1+2\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

Λύση:

$1^{ος}$ τρόπος (με Διακρίνουσα): Θα βρούμε μετά από χρονοβόρες πράξεις ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 9 - 4\sqrt{2}$ και μετά; Οι περισσότεροι (ακόμη και η πλειοψηφία των μαθητών της Γ Λυκείου!) θα σταματούσαν εδώ καθώς πολύ δύσκολα θα φανταζόντουσαν ότι η διακρίνουσα είναι τετράγωνος αριθμός! Πράγματι,

$$\Delta = 8 - 2\cdot 2\sqrt{2} + 1 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2} + 1^2 = \left(2\sqrt{2} - 1\right)^2$$

και τέλος αντικαθιστώντας στον τύπο επίλυσης μπορούμε τελικά να βρούμε τις σωστές ρίζες, μετά από μια νέα σειρά χρονοβόρων πράξεων!

$2^{ος}$ τρόπος (με Vieta): Πολλαπλασιάζοντας επί 2 την εξίσωση παίρνουμε

$2\cdot 2x^2 - 2\cdot(1+2\sqrt{2})x + 2\cdot\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{2x})^2 - (1+2\sqrt{2})(\mathbf{2x}) + 2\sqrt{2} = 0$ τριώνυμο ως προς 2x με προφανείς ρίζες τις 1 και $2\sqrt{2}$, άρα οι ρίζες είναι:

$$2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad ή \quad 2x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Για εξάσκηση: Να βρεθούν οι ρίζες των παρακάτω τριωνύμων:

I.	$2x^2–5x+3$,	$2y^2–21y+49$,	$2ω^2+7ω+3$,	$2κ^2–κ–1$,	$2c^2–3c+1$	
II.	$–2α^2+5α+7$,	$2y^2–17y–9$,	$2ω^2+ω–10$,	$2x^2–3x–5$,	$3κ^2 +5κ–2$	
III.	$3ω^2 –5ω–2$,	$3λ^2 +2λ–1$,	$3μ^2–10μ+3$,	$3x^2 –x–24$,	$3μ^2–25μ+8$	
IV.	$3ν^2–4ν–4$,	$–3α^2+11α+70$,	$5ν^2 +2ν–3$,	$5y^2–2y–3$,	$5ρ^2–6ρ+1$,	$5x^2–44x+68$
V.	$6x^2–25x–25$,	$–7λ^2+2λ+329$,	$14x^2+11x–3$,	$16x^2+21x–22$,	$2019x^2+2018x–1$	
VI.	$x^2+\frac{1}{7}x–50$,	$x^2–2{,}5x+1$,	$3x^4–5x^2+2$,	$4x^4–41x^2+100$,	$2x^2+3αx+α^2$	
VII.	$4x^2–12xy+8y^2$,	$9x^2–30xy+24y^2$,	$2x^2+(2β–α)x–αβ$			

Απαντήσεις:

I.	(1, 3/2),	(7, 7/2),	(–3, –1/2),	(1, –1/2),	(1, 1/2)	
II.	(–1, 7/2),	(9, –1/2),	(2, –5/2),	(–1, –5/2),	(–2, 1/3)	
III.	(2, –1/3),	(–1, 1/3),	(3, 1/3),	(3, –8/3),	(8, 1/3)	
IV.	(2, –2/3),	(7, –10/3),	(–1, 3/5),	(1, –3/5),	(1, 1/5),	(2, 34/5)
V.	(5, –5/6),	(7, –47/7),	(–1, 3/14),	(–2, 11/16),	(–1, 1/2019)	
VI.	(7, –50/7),	(2, 1/2),	$(\pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$,	(±2, ±5/2),	(–α, –α/2)	
VII.	(y, 2y),	(2y, 4y/3),	(–β, α/2)			

Παρατηρήσεις-σχόλια:

$1^η$ Η τελευταία ομάδα VII λύνεται και με απλή παραγοντοποίηση.

$2^η$ Μπορείτε να βρείτε τι κοινό έχουν όλα τα παραπάνω τριώνυμα;

$3^η$ Όταν όλοι οι συντελεστές ενός τριωνύμου είναι περιττοί αριθμοί, τότε το τριώνυμο δεν έχει ακέραια ρίζα.

Απόδειξη: Έστω ρ ακέραια ρίζα του τριωνύμου $αx^2+βx+γ$ όπου α, β, γ περιττοί ακέραιοι αριθμοί, τότε ρ άρτιος ή περιττός. Σε κάθε περίπτωση επειδή $γ = ρ(–αρ–β)$ καταλήγουμε σε άτοπο (μπορείτε να καταλάβετε το άτοπο;).

Πχ. το τριώνυμο $x^2–x–1$ έχει ρίζες τους άρρητους $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ (όπου φ η χρυσή τομή) ενώ τα τριώνυμα $αx^2 \pm x + γ$ με α, γ περιττούς φυσικούς, δεν έχουν ρίζες αφού $Δ=1–4αγ < 0$ για κάθε α, $γ \in \{1, 3, 5, \dots\}$